



CHAPITRE XII

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉS

TABLE DES MATIÈRES

1. Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques	3
1.1. Indépendance des variables aléatoires réelles quelconques	3
1.2. Propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire quelconque	3
1.3. Propriétés de la variance d'une variable aléatoire quelconque	4
2. Définition et propriétés des variables aléatoires à densité	5
2.1. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité	5
2.2. Densité	8
2.3. Loi de probabilité	9
2.4. Loi de probabilité de $g(X)$	9
3. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité	12
3.1. Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité	12
3.2. Théorème du transfert	13
3.3. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité	13
3.4. Variance d'une variable aléatoire réelle à densité	14
4. Lois usuelles à densité	16
4.1. Loi uniforme (à densité) sur $[a; b]$	16
4.1.1. Définition	16
4.1.2. Fonction de répartition	17
4.1.3. Espérance et variance	18
4.1.4. Stabilité de la loi uniforme par transformée affine	18
4.1.5. Simulation avec Python	18
4.2. Loi exponentielle de paramètre λ	20
4.2.1. Définition	20
4.2.2. Fonction de répartition	21
4.2.3. Espérance et variance	23
4.2.4. Lien entre les lois uniformes et exponentielles : loi de $\frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X)$	24
4.2.5. Simulation avec Python	25
4.3. Lois normales	25
4.3.1. Loi normale centrée réduite	25
Définition	25
Fonction de répartition	26
Espérance et variance	27
Table de loi, modélisation informatique et courbe de Φ	27

Simulation avec Python	28
4.3.2. Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss)	30
Définition	30
Transformée affine	30
Espérance et variance	31
Simulation avec Python	31
Somme de lois normales indépendantes	33
5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.	33

1. COMPLÉMENTS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES QUELCONQUES

Dans ce paragraphe, on énonce sans démonstration des propriétés communes à toutes les variables aléatoires réelles, qu'elles soient discrètes, à densité, ou ni discrètes, ni à densité (même si on en rencontre plus rarement dans ce cours).

On peut utiliser librement ces résultats dans les exercices. Attention toutefois à bien vérifier les hypothèses (l'espérance d'un produit est égal au produit des espérances **si les variables sont indépendantes**, la variance d'une somme est égale à la somme des variances **si les variables sont indépendantes**, etc)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1.1. Indépendance des variables aléatoires réelles quelconques.

Définition : Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques

Deux variables aléatoires réelles X et Y sont dites **indépendantes** si, et seulement si, pour tous intervalles réels I et J , on a :

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P(X \in I) \times P(Y \in J).$$

Théorème : Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous réels x et y , on a :

$$P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y).$$

Définition : Indépendance de n variables aléatoires réelles quelconques

Des variables aléatoires réelles X_1, X_2, \dots, X_n sont dites **mutuellement indépendantes** si, et seulement si, pour tous intervalles réels I_1, I_2, \dots, I_n , on a :

$$P([X_1 \in I_1] \cap [X_2 \in I_2] \cap \dots \cap [X_n \in I_n]) = P(X_1 \in I_1) \times P(X_2 \in I_2) \times \dots \times P(X_n \in I_n).$$

Définition : Indépendance d'une suite de variables aléatoires réelles quelconques

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si, et seulement si, pour toute partie A de \mathbb{N} et tous intervalles réels $(I_k)_{k \in A}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k \in A} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k \in A} P(X_k \in I_k).$$

Théorème : Lemme des coalitions

Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de p d'entre elles ($p < n$) est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $n - p$ autres.

Exemple 1.1.1. Si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont quatre variables aléatoires indépendantes, alors $X_1 + X_2$ est indépendante de X_3 , $X_1^2 X_3^4$ est indépendante de $X_2 + X_4$.

1.2. Propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire quelconque.

Théorème : Linéarité de l'espérance de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent une espérance, alors la somme $X + Y$ admet une espérance, et l'on a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Théorème : Espérance d'une fonction affine d'une variable aléatoire réelle quelconque

Soit X une variable aléatoire réelle, et a et b deux réels. Si X admet une espérance, alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance, et l'on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Théorème : Linéarité de l'espérance de n variables aléatoires

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles admettant une espérance, et a_1, a_2, \dots, a_n des réels. Alors la combinaison linéaire $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ admet également une espérance, et l'on a :

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n).$$

Proposition : Croissance de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent une espérance, et si $P(X \leq Y) = 1$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Remarque 1.2.1. $P(X \leq Y) = 1$ signifie que X prend presque-sûrement des valeurs inférieures à celles que prend Y .

Théorème : Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent une espérance et sont **indépendantes**, alors le produit XY admet une espérance, et l'on a :

$$E(XY) = E(X) \times E(Y).$$

Théorème : Espérance d'un produit de n variables aléatoires indépendantes

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles. Si X_1, X_2, \dots, X_n admettent une espérance et sont **mutuellement indépendantes**, alors le produit $X_1X_2 \dots X_n$ admet une espérance, et l'on a :

$$E(X_1X_2 \dots X_n) = E(X_1) \times E(X_2) \times \dots \times E(X_n).$$

Démonstration. C'est une récurrence immédiate. □

Définition : Variable aléatoire centrée

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. X est dite **centrée** si son espérance est nulle : $E(X) = 0$.

Proposition : Variable aléatoire centrée associée à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Alors $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée, appelée **variable aléatoire centrée associée à X** .

1.3. Propriétés de la variance d'une variable aléatoire quelconque.**Théorème : Variance de la somme de deux variables aléatoires réelles quelconques indépendantes**

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent une variance et sont **indépendantes**, alors la somme $X + Y$ admet une variance, et l'on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Théorème : Variance de la somme de n variables aléatoires réelles quelconques indépendantes

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles. Si X_1, X_2, \dots, X_n admettent une variance et sont **mutuellement indépendantes**, alors leur somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ admet une variance,

et on a

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

Démonstration. Encore une récurrence immédiate. □

Théorème : Variance d'une fonction affine d'une variable aléatoire réelle quelconque

Soit X une variable aléatoire réelle, et a et b deux réels. Si X admet une variance, alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance, et l'on a :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Définition : Variable aléatoire réduite

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. X est dite **réduite** si sa variance vaut 1 : $V(X) = 1$.

Proposition : Variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire quelconque

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance non nulle. Alors $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée** à X .

2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

On rentre maintenant dans le cœur du chapitre et on s'intéresse plus particulièrement à des variables à densité.

2.1. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Définition : Variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et F_X sa fonction de répartition (définie et croissante sur \mathbb{R} , de limite nulle en $-\infty$ et de limite égale à 1 en $+\infty$).

On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si, et seulement si :

- i)* F_X est continue sur \mathbb{R} ;
- ii)* F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Méthode : Reconnaître une variable aléatoire réelle à densité

Comment reconnaître qu'une variable aléatoire est une variable aléatoire à densité ? En examinant les propriétés de sa fonction de répartition F .

Il y a deux cas :

- Si la fonction F est donnée par sa formule explicite, on vérifie, dans cet ordre :
 1. F est définie sur \mathbb{R}
 2. F admet pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$
 3. F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (sauf éventuellement en un nombre fini de points)
 4. F continue sur \mathbb{R} (à vérifier aux points éventuels en lesquels F_X n'est pas de classe \mathcal{C}^1)
 5. F croissante sur \mathbb{R} , ou sur chaque intervalle lorsqu'elle est définie par morceaux (la continuité sur \mathbb{R} assure qu'elle est croissante sur \mathbb{R} lorsqu'elle est définie par morceaux)
- Si la fonction F est une fonction de répartition, alors elle vérifie déjà automatiquement les points 1, 2 et 5. On vérifie donc simplement, dans cet ordre :

3. F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (sauf éventuellement en un nombre fini de points)
4. F continue sur \mathbb{R} (à vérifier aux points éventuels en lesquels F_X n'est pas de classe \mathcal{C}^1)

Exemple 2.1.1. 1. Les variables aléatoires discrètes ne vérifient pas cette définition, car leur fonction de répartition n'est pas continue. Elles ne sont donc pas des variables à densité.

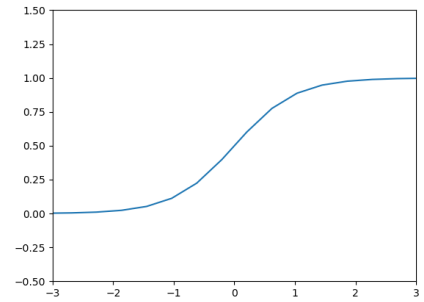
2. La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ (de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}) répond à toutes les conditions, donc elle peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable à densité.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     return np.exp(x)/(np.exp(x)+np.exp(-x))
6
7 x = np.linspace(-6,6,30)
8 y = F(x)
9
10 plt.plot(x,y)
11 plt.axis([-3,3,-0.5,1.5])
12 plt.show()

```

Graphique de la fonction



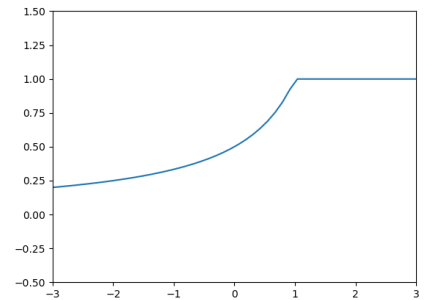
3. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, elle répond donc à toutes les conditions, donc elle peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable à densité.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     if (x < 1):
6         return 1/(2-x)
7     else:
8         return 1
9
10 x = np.linspace(-3,3,50)
11 y=[F(t) for t in x]
12
13
14 plt.plot(x,y)
15 plt.axis([-3,3,-0.5,1.5])
16 plt.show()

```

Graphique de la fonction



Théorème : Densité d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de fonction de répartition F_X . Alors toute fonction f_X définie et positive sur \mathbb{R} telle que $f_X(x) = F_X'(x)$ en tout point x où F_X est de classe \mathcal{C}^1 est appelée une **densité** de X . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Exemple 2.1.2.

1. La variable aléatoire X ayant pour fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$, est une variable à densité. Une densité de X est donnée par :

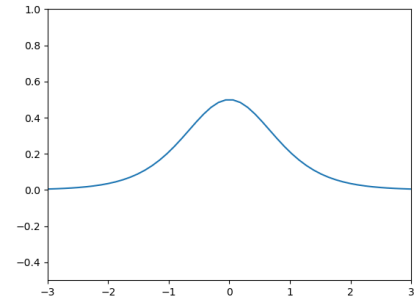
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = F'_X(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     return 2/((np.exp(x)+np.exp(-x))**2)
6
7 x = np.linspace(-6,6,100)
8 y = F(x)
9
10 plt.plot(x,y)
11 plt.axis([-3,3,-0.5,1.5])
12 plt.show()

```

Graphique de la fonction



2. La variable aléatoire X ayant pour fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, est une variable à densité. Une densité de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

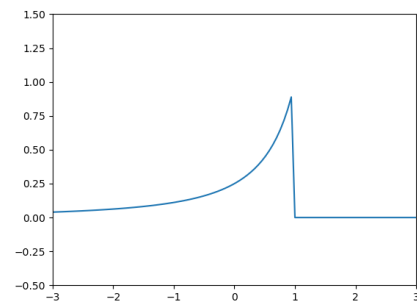
On a posé arbitrairement $f_X(1) = 0$ car F_X n'est pas dérivable en 1 donc $F'_X(1)$ n'est pas bien défini.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     if (x < 1):
6         return 1/((2-x)**2)
7     else:
8         return 0
9
10 x = np.linspace(-3,3,100)
11
12 y=[F(t) for t in x]
13
14 plt.plot(x,y)
15 plt.axis([-3,3,-0.5,1.5])
16 plt.show()

```

Graphique de la fonction

**Méthode : Déterminer une densité d'une variable aléatoire réelle à densité**

Comment déterminer une densité d'une variable aléatoire X à densité? En calculant la dérivée de la fonction de répartition F_X (là où c'est possible) et en attribuant une valeur arbitraire (positive) aux points où F_X n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème : Densités d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de fonction de répartition F_X . Toute fonction qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points (éventuellement, aucun) est une densité de X .

Démonstration. On ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant une fonction en un nombre fini de points (relation de Chasles). \square

- Remarque 2.1.3.*
- Une densité est toujours définie à un nombre fini de points près (en particulier, aux points où F_X n'est pas dérivable, on peut choisir une valeur quelconque pour la densité, cela ne change rien.
 - On ne parle donc jamais de la densité de X , mais d'une densité de X .

Proposition : Intégrale sur \mathbb{R} d'une densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, f_X une densité de X . Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente, et vaut : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$.

Démonstration. L'intégrale est convergente en $-\infty$ car la limite de F_X est nulle en $-\infty$. Elle l'est également en $+\infty$, car la limite de F_X est 1 en $+\infty$. \square

2.2. Densité.**Définition : Densité**

On dit qu'une fonction f est une densité si, et seulement si :

- f est définie et positive sur \mathbb{R} ;
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Exercice 2.2.1. Soit f définie par : $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = 0$ si $x \geq 0$. Montrer que f est une densité.

Théorème : Une densité définit une variable aléatoire réelle (à densité)

Toute densité f est une densité d'une variable aléatoire réelle X (à densité). La fonction de répartition F_X de X est alors donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Méthode : Déterminer la loi d'une variable aléatoire à densité, si on connaît une densité

Comment trouver la loi d'une variable aléatoire X si l'on connaît une densité f ? En cherchant sa fonction de répartition avec la relation $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Théorème : Régularité de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X . Alors la fonction de répartition F_X de X est de classe \mathcal{C}^1 en tout point où f_X est continue. En un tel point, on a $f_X(x) = F'_X(x)$.

Plus généralement, si f_X est continue à droite (resp. à gauche) en x , alors F_X est dérivable à droite (resp. à gauche) en x .

Démonstration. Admis. □

2.3. Loi de probabilité.

Définition : Support d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f_X une densité de X . Le **support** de X est l'ensemble des réels dont l'image par f_X n'est pas nulle : $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} / f_X(x) \neq 0\}$.

Remarque 2.3.1. Cette définition a un défaut : la densité d'une variable aléatoire à densité n'est pas unique (on peut fixer librement certaines valeurs aux points de discontinuité de F_x), donc le support n'est pas caractérisé par X .

Définition : Variable aléatoire positive

On dit qu'une variable aléatoire est positive lorsque son support est inclus dans $[0; +\infty[$.

Proposition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $a < b$ deux réels. Alors :

1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$;
2. $P(X = a) = 0$;
3. $P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$;
4. $P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f_X(t) dt$;
5. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(t) dt$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.3.2. Les quantités égales $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$ désignent l'aire sous la courbe de la densité f_X et comprise entre les droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Exercice 2.3.3. On choisit la variable aléatoire à densité Y dont la fonction de répartition est donnée

$$\text{par : } F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Calculer : $P(0,5 \leq Y \leq 1,5)$, $P(Y > 5)$, $P(-2 < Y < 3)$, $P(Y \leq 0)$. Interpréter les résultats trouvés en terme d'aires.

2.4. Loi de probabilité de $g(X)$.

Méthode : Loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité et Y une fonction de X : $Y = g(X)$. Par exemple, $Y = aX + b$ si g est affine, $Y = X^2$ si $g(t) = t^2$, etc.

1. On commence par déterminer la fonction de répartition $F_Y(x)$ en l'exprimant en fonction de $F_X(x)$.
2. On prouve ensuite que F_Y est continue sur \mathbb{R} , et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qui prouve que Y est à densité.
3. Si, de plus, l'on veut connaître une densité de Y , on dérive la fonction F_Y là où c'est possible.

Théorème : Fonction affine d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité et deux réels a et b ($a \neq 0$). Alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité.

Démonstration. La démonstration n'est pas à connaître dans le cas général mais il faut savoir refaire systématiquement le calcul dans les cas particuliers. \square

Remarque 2.4.1. Si l'on note f_X une densité de X , on peut prouver que la fonction f_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

est une densité de Y .

Exercice 2.4.2. On choisit la variable aléatoire à densité Y dont la fonction de répartition est donnée

$$\text{par : } F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = 2Y + 1$.

Théorème : Carré d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f_X . Alors $Y = X^2$ est une variable aléatoire réelle à une densité.

Démonstration. La démonstration n'est pas à connaître dans le cas général mais il faut savoir refaire systématiquement le calcul dans les cas particuliers. \square

Remarque 2.4.3. Si l'on note f_X une densité de X , on peut prouver que la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

est une densité de Y .

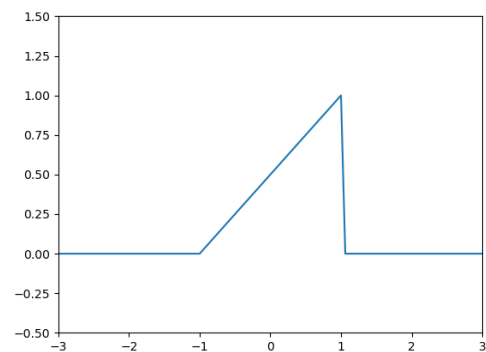
Exercice 2.4.4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{2}(t+1)$ si $t \in [-1; 1]$ et $f(t) = 0$ sinon.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     if (x <= 1) and (x >=-1):
6         return (x+1)/2
7     else:
8         return 0
9
10 x = np.linspace(-3,3,100)
11 y=[F(t) for t in x]
12
13
14 plt.plot(x,y)
15 plt.axis([-3,3,-0.5,1.5])
16 plt.show()

```

Graphique de la fonction



1. Montrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X à densité.
2. Soit $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité de Y .

Corollaire : Puissances d'une variable aléatoire réelle à densité

Si X est une variable aléatoire à densité, alors, pour tout entier naturel r non nul, X^r est également une variable aléatoire à densité.

Démonstration. La démonstration n'est pas à connaître dans le cas général mais il faut savoir refaire systématiquement le calcul dans les cas particuliers. \square

Remarque 2.4.5. Attention, si X est une variable aléatoire à densité, toute fonction $g(X)$ de X n'est pas nécessairement une variable aléatoire à densité.

Reprenons la variable aléatoire de densité f définie dans l'exercice 2.4.4, et considérons $Y = X + |X|$. Cherchons la fonction de répartition de Y .

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{cases} Y(\omega) = 0 & \text{si } X(\omega) \leq 0 \\ Y(\omega) = 2X(\omega) > 0 & \text{si } X(\omega) > 0. \end{cases}$$

Pour tout réel x , on en déduit : $[Y \leq x] = \emptyset$ si $x < 0$, $[Y = 0] = [X \leq 0]$ et, si $x > 0$:

$$[Y \leq x] = [Y = 0] \cup [0 < Y \leq x] = [X \leq 0] \cup \left[0 < X \leq \frac{x}{2}\right] = \left[X \leq \frac{x}{2}\right].$$

On obtient :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(0) & \text{si } x = 0 \\ F_X\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Or :

$$F_Y(0) = F_X(0) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(t+1) dt = \frac{1}{4} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow < 0} F_Y(x).$$

La continuité en 0 de la fonction F_Y n'est pas assurée, donc Y n'est pas une variable aléatoire à densité.

Mais 0 est le seul point de discontinuité de Y , donc Y n'est pas non plus une variable aléatoire discrète. En effet, si Y était discrète avec 0 pour seul point de discontinuité de sa fonction de répartition, ce serait la variable constante 0 donc on aurait $P(Y = 0) = 1$ et $F_X(0) = F_Y(0) = 1$. Contradiction car $F_X(0) = \frac{1}{4}$. Donc Y n'est pas une variable discrète.

Il existe donc des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes, ni à densité. La somme de deux variables aléatoires à densité n'est pas non plus forcément une variable à densité.

L'étude de ces variables est hors programme. Mais il ne faut pas en déduire que toute variable est soit discrète, soit à densité.

Exercice type concours.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ \alpha\sqrt{t+2} & \text{si } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

- Déterminer la valeur du réel α pour que f soit une densité. Dans les questions suivantes, on considère une variable aléatoire réelle X de densité f .
- Donner l'expression de la fonction de répartition de X .
- Calculer les probabilités : $P(X > 1)$, $P(-1 \leq X < 1)$, $P_{[X>0]}(X < 1)$.
- Calculer l'espérance et la variance de X , si elles existent.
- Montrer que $Y = |X|$ est une variable aléatoire à densité, et donner l'expression d'une densité f_Y de Y .

3. MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE À DENSITÉ

3.1. Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité. Souvenons-nous que si f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur \mathbb{R} , on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente.

Définition : Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, f_X une densité de X . On dit que X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Exercice 3.1.1. Examiner l'existence de l'espérance dans les cas suivants :

1. X donnée par sa densité : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Y donnée par sa fonction de répartition : $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Remarque 3.1.2. Attention : l'espérance d'une variable aléatoire à densité n'existe pas toujours. Il faut toujours examiner la convergence absolue de l'intégrale au préalable.

Méthode : Existence et calcul de l'espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Pour montrer l'existence puis calculer l'espérance d'une variable aléatoire X à densité f_X :

- **Existence** : on examine la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_X(t)| dt$.

Si X est positive, la convergence absolue est identique à la convergence : on obtient une intégrale sans valeurs absolues :

$$X \text{ positive} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} |t f_X(t)| dt = \int_0^{+\infty} |t f_X(t)| dt = \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Sinon, il faut utiliser la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_X(t)| dt = \int_{-\infty}^0 -t f_X(t) dt + \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

- **Valeur** : on calcule l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$.

Si X est positive, l'examen précédent de la convergence donne la valeur de l'espérance puisque les valeurs absolues de l'intégrale ont été retirées. Dans le cas contraire, il faut faire un nouveau calcul.

Proposition : Propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

! Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

1. Si X est bornée, c'est-à-dire $X(\Omega) = [a; b]$ avec $a < b$ réels, alors X admet une espérance, et l'on a l'encadrement : $a \leq E(X) \leq b$.
2. Si X est positive, alors $E(X) \geq 0$, sous réserve d'existence.

Démonstration. Admis. □

3.2. Théorème du transfert. On rappelle que toute fonction $g(X)$ d'une variable aléatoire réelle discrète X est encore une variable aléatoire réelle discrète. Ce n'est plus vrai dans le cas des variables aléatoires réelles à densité : toute fonction $g(X)$ d'une variable aléatoire réelle à densité X n'est pas nécessairement à densité.

Théorème : Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a; b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et g une fonction continue sur \mathbb{R} (sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a; b[$). Alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt$ converge absolument, et dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt.$$

Méthode : Théorème du transfert

Pour utiliser le théorème du transfert :

1. on établit que g est continue sur $]a; b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, avec $X(\Omega) \subset]a; b[$ ($a = -\infty$ ou $b = +\infty$ sont possibles) ;
2. on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)f_X(t)| dt$ est convergente ;
3. on calcule l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt$.

Exercice 3.2.1. Soit X une variable aléatoire de densité : $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La variable aléatoire $T = \frac{1}{1 + e^{-X}}$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Théorème : Espérance d'une fonction affine d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une espérance, et a et b deux réels ($a \neq 0$). Alors la variable $Y = aX + b$ admet une espérance, et l'on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Démonstration. À compléter. □

3.3. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité.

Définition : Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité et $r \in \mathbb{N}^*$ un entier. On dit que X admet un **moment d'ordre r** si, et seulement si la variable aléatoire X^r admet une espérance. On note $m_r(X)$ le moment d'ordre r de la variable aléatoire X : $m_r(X) = E(X^r)$.

Proposition : Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X et $r \in \mathbb{N}^*$ un entier. Alors X possède un moment d'ordre r si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt$ converge absolument, et, dans ce cas, on a :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème du transfert, avec la fonction $g: x \mapsto x^r$ continue sur \mathbb{R} . \square

Proposition : Moments d'ordre inférieur à r

Soit X une variable aléatoire réelle à densité et $r \in \mathbb{N}^*$ un entier. Si X possède un moment d'ordre r , alors X possède un moment d'ordre k pour tout entier naturel $k \leq r$.

Démonstration. À compléter. \square

3.4. Variance d'une variable aléatoire réelle à densité.**Définition : Variance d'une variable aléatoire réelle à densité**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Si X admet une espérance et si la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance** de X le réel $V(X)$ défini par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Remarque 3.4.1. X est une variable à densité, donc $Y = X - E(X)$ est une variable à densité d'après le théorème 2.4. Et $Z = Y^2 = (X - E(X))^2$ est également une variable à densité d'après le théorème 2.4.

Théorème : Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Alors X admet une variance si, et seulement si X admet un moment d'ordre 2. Dans ces conditions, on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Démonstration.

- Si X possède un moment d'ordre 2, elle possède un moment d'ordre 1, c'est-à-dire une espérance. On développe :

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2.$$

La variable X^2 admet une espérance; il en est de même de $-2E(X)X + (E(X))^2$ qui est une fonction affine de X (avec $a = -2E(X)$ et $b = (E(X))^2$). On en déduit par linéarité (théorème 1.2) que $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Ainsi, $V(X)$ existe, et :

$$V(X) = E(X^2) + E\left(-2E(X)X + (E(X))^2\right) = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- Réciproquement, si $V(X)$ existe, X et $(X - E(X))^2$ admettent des espérances. Il en est de même de X^2 , car :

$$X^2 = (X - E(X))^2 + 2E(X)X - (E(X))^2.$$

La variable X admet donc un moment d'ordre 2. \square

Proposition : Propriétés de la variance d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité possédant une variance. Alors :

- $V(X) \geq 0$.
- $aX + b$ admet une variance, et $V(aX + b) = a^2V(X)$ (avec $a \neq 0$).

Démonstration.

- $V(X) \geq 0$ car c'est l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ positive.
- On sait que $aX + b$ admet une espérance donnée par $E(aX + b) = aE(X) + b$. On a alors :

$$(aX + b - E(aX + b))^2 = (aX - aE(X))^2 = a^2(X - E(X))^2.$$

Par hypothèse, $(X - E(X))^2$ possède une espérance. Il en est de même de $a^2(X - E(X))^2$. Donc $aX + b$ possède une variance, et :

$$V(aX + b) = E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) = E\left(a^2(X - E(X))^2\right) = a^2E\left((X - E(X))^2\right) = a^2V(X).$$

□

Définition : Écart-type d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Si X admet un moment d'ordre deux, on appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exercice type concours.

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
- Calculer les probabilités : $P(X > 0,25)$, $P(-0,25 \leq X < 0,25)$ et $P_{[X > 0,25]}(X < 0,64)$.
- Déterminer une densité f_X de X .
- Calculer l'espérance et la variance de X , si elles existent.
- La variable aléatoire $Z = \sqrt{X}$ est-elle une variable aléatoire à densité? Si oui, donner une densité, son espérance et sa variance.

Exercice type concours.**Loi bêta de première espèce.**

Pour tous entiers naturels m et n , on pose :

$$\beta(n, m) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1} du.$$

- a. Prouver que $\beta(n, m) = \beta(m, n)$ et que, pour $m \geq 2$:

$$\beta(n, m) = \frac{m-1}{n} \beta(n+1, m-1).$$

b. En déduire $\beta(n, m)$.

- On considère la fonction $f_{n,m}$ définie par :

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(n,m)} x^{n-1}(1-x)^{m-1} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

- a. Montrer que $f_{n,m}$ est une densité de probabilité.
- b. Soit X une variable aléatoire admettant $f_{n,m}$ comme densité. Après en avoir justifié l'existence, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice type concours.

Loi Gamma

Soit $a > 0$. On considère $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

1. Justifier que $\Gamma(a)$ est définie pour tout $a > 0$, et calculer $\Gamma(1)$.
2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ en fonction de n lorsque n est un entier naturel non nul.
3. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
 - a. Montrer que f_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_n .
 - b. Déterminer l'espérance de X_n , si elle existe.

4. LOIS USUELLES À DENSITÉ

4.1. Loi uniforme (à densité) sur $[a; b]$.

4.1.1. *Définition.* La loi uniforme sur un segment est la plus simple de toutes les lois de variables aléatoires réelles à densité. Elle exprime le fait qu'un élément est choisi *uniformément* au hasard sur le segment.

Proposition : Densité de la loi uniforme sur $[a; b]$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors f est une densité de probabilité.

Démonstration. À compléter.

□

Définition : Loi uniforme $\mathcal{U}([a; b])$

Soit a et b deux réels, $a < b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur l'intervalle** $[a; b]$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si, et seulement si X a pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

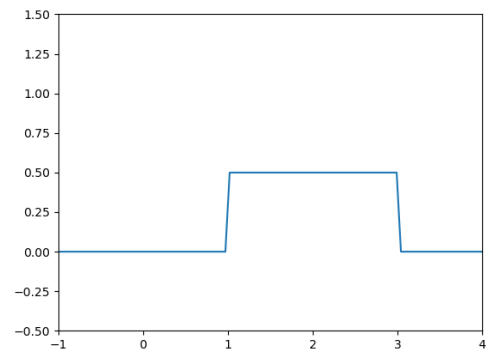
Exemple 4.1.1. Densité de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$:


```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     if (x <= 3) and (x>=1):
6         return 1/2
7     else:
8         return 0
9
10 x = np.linspace(-1,4,100)
11
12 y=[f(t) for t in x]
13
14 plt.plot(x,y)
15 plt.axis([-1,4,-0.5,1.5])
16 plt.show()

```

Graphe de la fonction



Remarque 4.1.2. Attention, pour $a, b \in \mathbb{Z}$, il ne faut pas confondre avec la loi uniforme **discrète** sur l'ensemble d'entiers consécutifs $\llbracket a, b \rrbracket = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$.

Remarque 4.1.3. On peut donc choisir comme support : $X(\Omega) = [a; b]$. Mais $P(X = b) = 0$, donc on peut également considérer que $X(\Omega) = [a; b[$ avec la densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Or encore $X(\Omega) =]a; b]$ ou $]a; b[$ avec des définitions cohérentes de la densité.

4.1.2. Fonction de répartition.

Théorème : Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a; b])$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Démonstration. À compléter. □

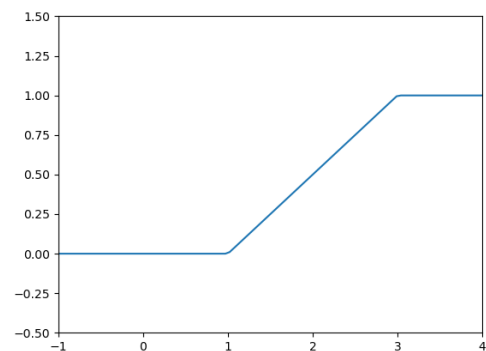
Exemple 4.1.4. Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def F(x):
5     if (x < 1):
6         return 0
7     elif x<=3:
8         return (x-1)/2
9     else:
10        return 1
11
12 x = np.linspace(-1,4,100)
13
14 y=[F(t) for t in x]
15
16 plt.plot(x,y)
17 plt.axis([-1,4,-0.5,1.5])
18 plt.show()

```

Graphe de la fonction



4.1.3. *Espérance et variance.***Théorème : Espérance et variance de la loi uniforme $\mathcal{U}([a; b])$**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.1.5. L'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a; b])$ est donc égale à la valeur médiane de l'intervalle $[a; b]$ comme pour une loi uniforme discrète sur $\llbracket a; b \rrbracket = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ (pour $a, b \in \mathbb{Z}$).

4.1.4. *Stabilité de la loi uniforme par transformée affine.***Proposition : Transformée affine de la loi uniforme**

Soit a et b deux réels avec $a < b$.

- Si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $Y = a + (b-a)X$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.
- Réciproquement, si Y suit la loi uniforme sur $[a, b]$, alors la variable aléatoire $X = \frac{Y-a}{b-a}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 4.1.6. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[1, 5]$. Alors la variable aléatoire X définie par : $X = \frac{Y-1}{5-1} = \frac{1}{4}(Y-1)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 4.1.7. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y = 2X + 1$.

1. Montrer que $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 1$ et $F_Y(x) = 1$ pour tout $x > 3$.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y .
3. En déduire la loi de Y
4. Donner l'espérance et la variance de Y par deux méthodes différentes.

Exercice 4.1.8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0; 1])$.

1. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de X .
2. Soit $Y = 5X - 1$.
 - a. Déterminer la loi de Y .
 - b. Donner la valeur de $E(Y)$ et de $V(Y)$ de deux façons différentes.

4.1.5. *Simulation avec Python.* La commande `rand()` en Python de la bibliothèque `numpy.random` renvoie un nombre aléatoirement compris entre 0 et 1 (1 exclu), donc suivant la loi $\mathcal{U}([0; 1[)$:

```
1 import numpy.random as rd
2
3 for k in range (3):
4     x=rd.rand()
5     print(x)
```

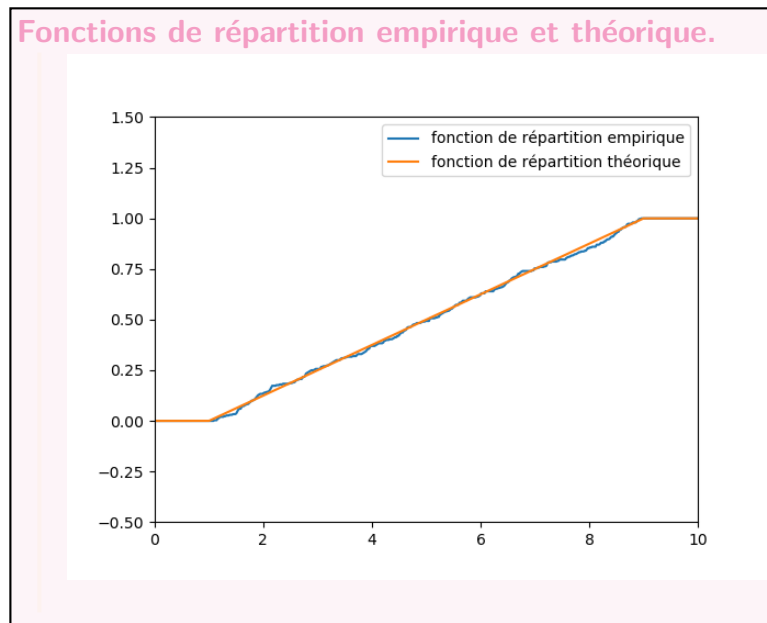
renvoie

```
1 0.580571249708933
2 0.41856119270700476
3 0.40008542837297545
```

Exercice 4.1.9. Compléter le programme suivant pour simuler 300 valeurs d'une loi $\mathcal{U}([1;9])$:

```
1 X=[]
2 for k in range (300):
3     simul=.....
4     X.append(simul)
```

```
1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 for k in range (3):
6     x=rd.rand()
7     print(x)
8
9 # Construction de la fonction de repartition empirique.
10 X=[]
11 for k in range (300):
12     simul=1+8*rd.rand()
13     X.append(simul)
14
15
16 x = np.linspace(0,10,500)
17 y1=[(sum(t<u for t in X))/300 for u in x]
18
19 # Construction de la fonction de repartition theorique.
20 def F(x):
21     if (x < 1):
22         return 0
23     elif x<=9:
24         return (x-1)/8
25     else:
26         return 1
27
28 y2=[F(t) for t in x]
29
30 plt.plot(x,y1, label="fonction de repartition empirique")
31 plt.plot(x,y2, label="fonction de repartition theorique")
32 plt.axis([0,10,-0.5,1.5])
33 plt.legend()
34 plt.show()
```



4.2. Loi exponentielle de paramètre λ .

4.2.1. Définition.

Proposition : Densité de la loi exponentielle de paramètre λ

Soit $\lambda > 0$ et f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Alors f est une densité de probabilité.

En particulier, on peut désormais donner directement la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration. À compléter

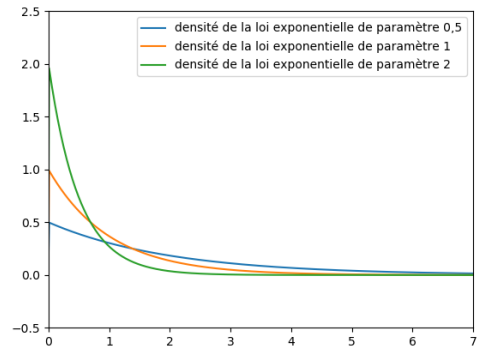
□

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def expo(x,lam) :
5     if (x<0):
6         return 0
7     else :
8         return lam*np.exp(-lam*x)
9
10 x=np.linspace(-1,7,500)
11
12 y1=[expo(t,0.5) for t in x]
13 y2=[expo(t,1) for t in x]
14 y3=[expo(t,2) for t in x]
15
16 plt.plot(x,y1, label="densité de la loi
17     exponentielle de parametre 0,5")
18 plt.plot(x,y2, label="densité de la loi
19     exponentielle de parametre 1")
20 plt.plot(x,y3, label="densité de la loi
21     exponentielle de parametre 2")
22 plt.axis([0,7,-0.5,2.5])
23 plt.legend()
24 plt.show()

```

Densités des lois exponentielles pour quelques valeurs du paramètre.



Exercice 4.2.1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx$ converge et donner sa valeur.

Définition : Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un réel *strictement positif*. Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ , notée $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si, et seulement si X a pour densité la fonction f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque 4.2.2. On choisit alors comme support : $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

4.2.2. Fonction de répartition.

Théorème : Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration. À compléter.

□

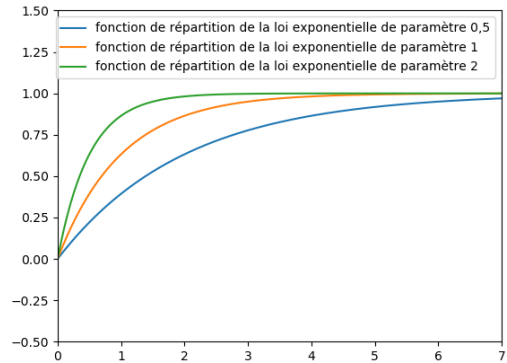
Exemple 4.2.3.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def rep_expo(x, lam) :
5     if (x<0):
6         return 0
7     else :
8         return 1-np.exp(-lam*x)
9
10 x=np.linspace(-1,7,500)
11
12 y1=[rep_expo(t,0.5) for t in x]
13 y2=[rep_expo(t,1) for t in x]
14 y3=[rep_expo(t,2) for t in x]
15
16 plt.plot(x,y1, label="fonction de
17     repartition de la loi exponentielle de
18     parametre 0,5")
19 plt.plot(x,y2, label="fonction de
20     repartition de la loi exponentielle de
21     parametre 1")
22 plt.plot(x,y3, label="fonction de
23     repartition de la loi exponentielle de
24     parametre 2")
25 plt.axis([0,7,-0.5,1.5])
26 plt.legend()
27 plt.show()

```

Fonctions de répartition des lois exponentielles pour quelques valeurs du paramètre.



Proposition : Probabilité $P(X > x)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors : $P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $[X > x] = [X \leq x]^c$, donc $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$. \square

Définition : Loi sans mémoire

On dit qu'une variable aléatoire X est **sans mémoire** si, et seulement si, pour tout réels x et y positifs : $P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y)$.

Remarque 4.2.4. Lorsque les probabilités sont non nulles, on peut aussi écrire :

$$P_{[X > y]}(X > x + y) = P(X > x)$$

qui illustre la dénomination "sans mémoire".

En effet,

$$P_{[X > y]}(X > x + y) = \frac{P([X > x + y] \cap [X > y])}{P(X > y)} = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{[X > y]}(X > x + y) = P(X > x) &\Leftrightarrow \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = P(X > x) \\ &\Leftrightarrow P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y) \end{aligned}$$

Proposition : Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire réelle à densité positive ou nulle et sans mémoire. Alors X suit une loi exponentielle.

Démonstration.

□

4.2.3. *Espérance et variance.***Théorème : Espérance et variance de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration. À compléter

□

Remarque 4.2.5. Les valeurs de l'espérance et de la variance permettent un calcul rapide des intégrales $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$. En effet, on reconnaît (au facteur λ près) le calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 4.2.6. Montrer que les intégrales suivantes convergent et donner leur valeur : $\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$ et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx$.

Exercice type concours.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. **a.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
b. Calculer l'espérance et la variance de Y .
2. Mêmes questions pour $Y = X^2$.
3. Déterminer une densité de X^3 .

Exercice type concours.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X ayant pour densité f . Montrer que F réalise une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble à préciser.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X . *On utilisera les propriétés d'une loi usuelle pour éviter des calculs inutiles.*
4. Déterminer la loi de $Y = |X|$. La variable $Z = X + Y$ est-elle à densité ?

Exercice type concours.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ (Y est la partie entière de X) et $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
On pourra utiliser la loi de $Y + 1$.

3. Déterminer la loi de Z .
4. Déterminer l'espérance de Z . Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

Exercice type concours.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y . On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Exprimer les fonction de répartition de Z et T en fonction des fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y .
2. Déterminer une densité f_Z de Z et une densité f_T de T en fonction de f_X , f_Y , F_X et F_Y .
3. On suppose que X et Y suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$. Préciser f_Z et f_T . Déterminer l'espérance et la variance de Z et T .
4. On suppose que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ . Quelle est la loi (classique) suivie par T ? En déduire l'espérance et la variance de T . Préciser f_Z . En déduire l'espérance et la variance de Z .

4.2.4. Lien entre les lois uniformes et exponentielles : loi de $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$.

Proposition : Lien entre les lois uniformes et exponentielles (exercice classique).

Soit $\lambda > 0$, X une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$ et $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$. Alors Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $F_Y(x)$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - X) \geq -\lambda x) \\ &= P(1 - X \geq e^{-\lambda x}) \\ &= P(X \leq 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= F_X(1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

où F_X désigne la fonction de répartition de X de loi $\mathcal{U}([0; 1])$: $F_X(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$

On compose en remplaçant y par $1 - e^{-\lambda x}$:

$$F_Y(x) = F_X(1 - e^{-\lambda x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq 1 - e^{-\lambda x} < 1 \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} \geq 1. \end{cases}$$

On résout :

$$1 - e^{-\lambda x} < 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} > 1 \Leftrightarrow -\lambda x > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

et :

$$1 - e^{-\lambda x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} < 0 \text{ impossible.}$$

On obtient finalement :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ . Donc $Y \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. \square

4.2.5. Simulation avec Python.

Remarque 4.2.7 (Modélisation informatique). Pour simuler une loi exponentielle de paramètre a , on peut donc utiliser $-1/a*\text{np.log}(1-\text{np.rand}())$ en chargeant la bibliothèque `numpy.random`.

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3
4 for k in range (5):
5     simul=-1/2*np.log(1-rd.rand())
6     print x
7
8 x = 1.3034312381693
9 x = 0.4181868547834
10 x = 0.4233402347962
11 x = 0.8464397843807
12 x = 0.0292876581526

```

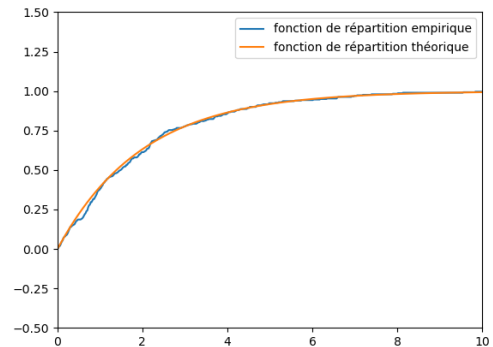
Vérification graphique, en comparant la fonction de répartition empirique obtenue par une simulation, avec la fonction de répartition théorique de la loi exponentielle :

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 a=0.5
6 N=300
7
8 # Construction de la fonction de
9 # répartition empirique.
10 X=[]
11 for k in range (N):
12     simul=-1/a*np.log(1-rd.rand())
13     X.append(simul)
14
15 x = np.linspace(0,10,500)
16 y1=[(sum(t<u for t in X))/300 for u in x]
17
18 # Construction de la fonction de
19 # répartition théorique.
20 def rep_expo(x,lam) :
21     if (x<0):
22         return 0
23     else :
24         return 1-np.exp(-lam*x)
25
26 y2=[rep_expo(t,a) for t in x]
27
28 plt.plot(x,y1, label="fonction de
29 # répartition empirique")
30 plt.plot(x,y2, label="fonction de
31 # répartition théorique")
32 plt.axis([0,10,-0.5,1.5])
33 plt.legend()
34 plt.show()

```

Comparaison de la fonction de répartition empirique obtenue en simulant des transferts de la loi uniforme et de la fonction de répartition théorique.



4.3. Lois normales.

4.3.1. Loi normale centrée réduite.

Définition.

Proposition : Densité de la loi normale centrée réduite

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Alors φ est une densité de probabilité.

Démonstration. φ est définie, positive et continue sur \mathbb{R} .

On admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et vaut 1. Autrement dit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Cette dernière intégrale est connue sous le nom d'intégrale de Gauss. □

Définition : Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

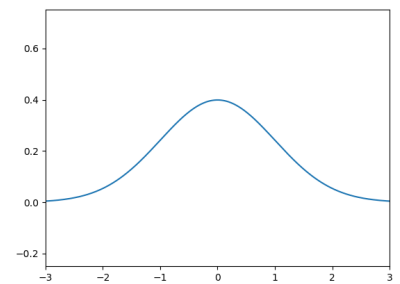
Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, si, et seulement si X a pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def gauss(x):
5     return (2*np.pi)**(-0.5)*np.exp(-(x**2)/2)
6
7 x = np.linspace(-3,3,500)
8
9 y=[gauss(t) for t in x]
10
11 plt.plot(x,y)
12 plt.axis([-3,3,-0.25,0.75])
13 plt.show()

```

Une densité de la loi normale.

Remarque 4.3.1. La densité φ est paire, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , strictement croissante sur \mathbb{R}_- et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ , et de limites nulles en $\pm\infty$ (à savoir démontrer).

Remarque 4.3.2. Le support de X peut donc être choisi égal à \mathbb{R} : $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Fonction de répartition.

Théorème : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

Soit $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$. On note Φ la fonction de répartition de X ; son expression est, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Φ possède les propriétés suivantes :

1. Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ;
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, autrement dit : $P(X \leq -x) = P(X > x)$.
3. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 4.3.3. Ces propriétés se retrouvent en examinant la courbe de la densité φ . Cette courbe, dite "en cloche" ou "gaussienne", est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque φ est paire.

Espérance et variance.

Théorème : Espérance et variance de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$. Alors X admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

Autrement dit, X est une variable centrée réduite.

Démonstration. À compléter.

□

Exercice 4.3.4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

1. Soit $Y = -2X + 4$. Y est-elle une variable aléatoire à densité? Si oui, déterminer une densité de Y .
2. Mêmes questions pour $Z = 5 - Y$.

Table de loi, modélisation informatique et courbe de Φ .

On ne peut pas calculer précisément $\Phi(x)$ (à part pour $x = 0$) car cette fonction n'est pas exprimable à l'aide des fonctions usuelles. On a donc recourt à une table de loi pour connaître les valeurs :

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

La valeur de u se lit dans la première colonne pour sa partie entière et sa première décimale, la deuxième décimale se trouvant dans la première ligne. La table ne donne les valeurs de $\Phi(u)$ que pour les valeurs de u positives. Pour les valeurs négatives, on utilise la relation $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$.

Exemple 4.3.5.

- $P(X \leq 2,56) = 0,9948$ et $P(X \leq 1,2) = 0,8849$
- On cherche x tel que $P(X \leq x) = 0,8264$. On trouve $x = 0,94$.
- $P(X \leq -1,57) = \Phi(-1,57) = 1 - \Phi(1,57) = 1 - 0,9418 = 0,0582$.
- On cherche x tel que $P(X \leq x) = 0,33$:

$$\Phi(x) = 0,33 \Leftrightarrow 1 - \Phi(-x) = 0,33 \Leftrightarrow \Phi(-x) = 0,67 \Leftrightarrow -x = 0,44 \Leftrightarrow x = -0,44.$$

- $P(-1,23 \leq X \leq 1,75) = \Phi(1,75) - \Phi(-1,23) = \Phi(1,75) - 1 + \Phi(1,23) = 0,9599 - 1 + 0,8907 = 0,8506$.

Simulation avec Python. Pour simuler une loi normale centrée réduite, on utilise la bibliothèque `numpy.random` et la commande `numpy.random.normal(0,1,1)` (nous verrons dans la suite la raison d'être de ces paramètres).

```

1 import numpy.random as rd
2 for k in range(10):
3     x=rd.normal(0,1,1)
4     print(x)
5
6
7 x = 0.3240161690466
8 x = -0.1884802915212
9 x = 0.4241610268273
10 x = -1.0327357335851
11 x = -0.6779671959891
12 x = -0.9239258062270
13 x = -1.3874077579715
14 x = 2.7266682097718
15 x = -0.7123134327695
16 x = -1.7086773592848

```

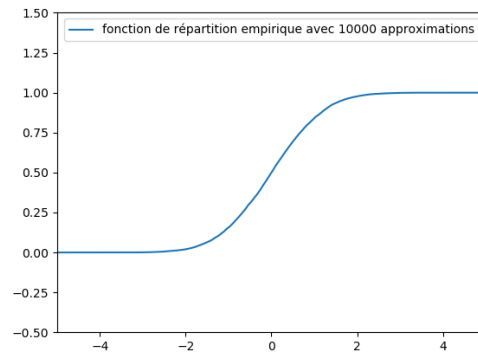
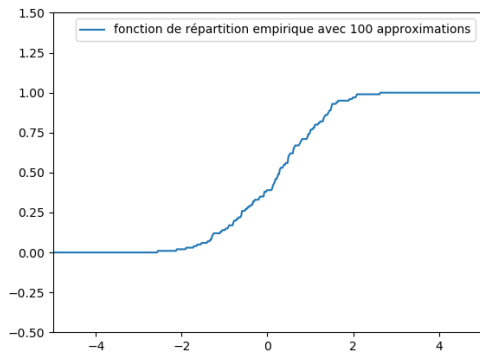
En effectuant un grand nombre de simulations, on peut ensuite compter toutes les valeurs inférieures à x puis en calculer la proportion. Cette proportion est une valeur approchée de la probabilité $P(X \leq x)$, donc une valeur approchée de $\Phi(x)$ (on construit ainsi une *fonction de répartition empirique*) :

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 # Construction de la fonction de repartition empirique.
7 N=10000 # pour choisir la precision de l approximation.
8
9 X=[]
10 for k in range (N):
11     simul=rd.normal(0,1,1)
12     X.append(simul)
13
14
15 x = np.linspace(-5, 5, 500)
16 y = [(sum(t<u for t in X))/N for u in x]
17
18
19 plt.plot(x, y, label="fonction de repartition empirique
20         avec "+str(N)+" approximations")
21 plt.axis([-5, 5, -0.5, 1.5])
22 plt.legend()
23 plt.show()

```

Approximations de la fonction de répartition de la loi normale



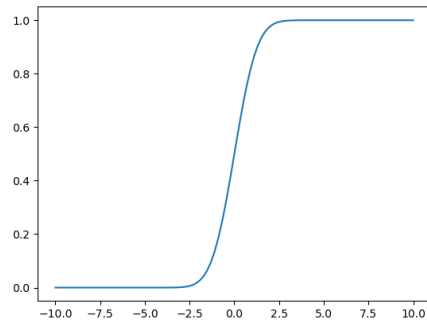
Il existe aussi un moyen direct de tracer la fonction de répartition de la loi normale, en utilisant la fonction de la bibliothèque `scipy.stats` (pas toujours installée par défaut).

```

1 # Fonction de répartition théorique
2 from scipy.stats import norm
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 x = np.linspace(-10, 10, 100)
7 y = norm.cdf(x)
8
9 plt.plot(x, y)
10 plt.show()

```

Fonction de répartition théorique de la loi normale.



4.3.2. Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss).

Définition.

Définition : Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Soit μ et σ deux réels, $\sigma > 0$. Une variable aléatoire X suit la **loi normale de paramètres μ et σ^2** , notée $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, si, et seulement si, X admet pour densité la fonction φ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Démonstration. La fonction φ est définie, positive et continue sur \mathbb{R} . On admet que son intégrale sur \mathbb{R} est convergente et de valeur 1. \square

Remarque 4.3.6. Le support de X peut donc être choisi égal à \mathbb{R} : $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Transformée affine. Comme pour la loi normale centrée réduite, on ne peut pas exprimer explicitement la fonction de répartition de la loi normale. Mais on peut se ramener à la loi normale centrée réduite :

Théorème : Lien entre loi normale et loi normale centrée réduite

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
2. Soit a et b deux réels, $a \neq 0$. Réciproquement :
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, alors la variable aléatoire $Y = aX + b$ suit une loi normale de paramètres b et a^2 .

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Transformée affine de loi normale

Soit a et b deux réels, $a \neq 0$. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si, et seulement si $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.3.7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres μ et σ^2 : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Il est assez simple de retrouver les paramètres de la loi normale suivie par $Y = aX + b$. En effet, il s'agit de l'espérance et de la variance de Y : $E(Y) = aE(X) + b = a\mu + b$ et $V(Y) = a^2V(X) = a^2\sigma^2$.

Espérance et variance.

Théorème : Espérance et variance de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 4.3.8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1; 2)$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent $E(X) = -1$ et $V(X) = 2$.

Méthode : Calculs de probabilités avec la loi normale

Le théorème 4.3.2 permet d'utiliser la table de la loi normale centrée réduite pour donner des valeurs de la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

Exercice 4.3.9. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres 40 et 4. Déterminer $P(X \leq 45, 12)$ puis $P(38 \leq X \leq 41)$.

Exercice 4.3.10. Le QI des individus d'une population suit une loi normale de paramètres 100 et 15. On considère qu'une personne a un QI normal, s'il diffère de moins de σ de la moyenne. Quelle est alors la proportion d'individus présentant un QI normal ?

Simulation avec Python.

Pour simuler une loi normale de paramètres m et s^2 , on utilise encore la bibliothèque `numpy.random` et la fonction `numpy.random.normal(m,s,1)`

Attention le deuxième paramètre est l'écart type et pas la variance.

Remarque 4.3.11. On voit maintenant pourquoi on a utilisé la commande `numpy.random.normal(0,1,1)` pour simuler une loi normale : les deux premiers paramètres sont bien l'espérance et l'écart-type de la loi normale usuelle.

Le dernier paramètre (ici 1) peut être modifié pour obtenir un nombre quelconque de simulations (sous forme de liste).

```

1 import numpy.random as rd
2 for k in range(10):
3     x=rd.normal(10,5**(1/2),1)
4     print(x)
5
6
7 x = 9.5465257540391
8 x = 4.5226082445676
9 x = 10.237611480657
10 x = 10.165101640209
11 x = 10.158397734668
12 x = 12.149031910764
13 x = 12.960121559881
14 x = 11.348096458914
15 x = 6.8289494919063
16 x = 9.724315918986

```

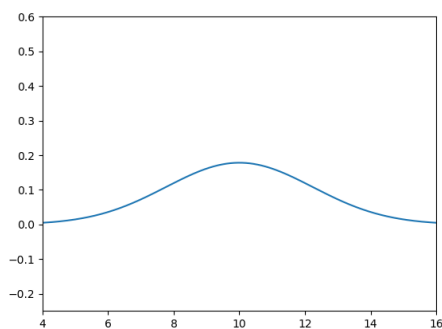
Regardons ensuite à quoi ressemble la densité de la loi normale $\mathcal{N}(10;5)$.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def gauss_10_5(x):
5     return (2*np.pi*5)**(-0.5)*np.exp(-((x
6     -10)**2)/(2*5))
7
8 x = np.linspace(4,16,500)
9 y=[gauss_10_5(t) for t in x]
10
11 plt.plot(x,y)
12 plt.axis([4,16,-0.25,0.6])
13 plt.show()

```

Une densité de la loi normale
 $\mathcal{N}(10;5)$.



Remarque 4.3.12. Il n'existe pas (à ma connaissance) de fonction Python pour représenter la fonction de répartition d'une loi normale de paramètres différents de 0 et 1.

Exercice 4.3.13. Proposer une méthode Python pour fabriquer la fonction de répartition empirique d'une loi normale de paramètres quelconques.

Somme de lois normales indépendantes.

Proposition : Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales

Soit X et X' des variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois normales : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ et $X' \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu'; \sigma'^2)$. Alors leur somme $X + X'$ suit une loi normale de paramètres $\mu + \mu'$ et $\sigma^2 + \sigma'^2$:

$$X + X' \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu + \mu'; \sigma^2 + \sigma'^2).$$

Démonstration. Admis. □

Exercice 4.3.14. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5; 4)$. On suppose X et Y indépendantes. Donner la loi de $S = X + Y$, son espérance et sa variance.

Proposition : Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois normales : $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i; \sigma_i^2)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors leur somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi normale de paramètres $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2).$$

Démonstration. On utilise une récurrence et le lemme des coalitions dans l'hérédité pour "séparer" $X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} indépendantes. □

Exercice 4.3.15. Soit $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ des variables aléatoires de même loi normale centrée réduite, et mutuellement indépendantes ($i \in \llbracket 1; n \rrbracket$).

1. S est-elle une variable aléatoire à densité? Donner sa loi.
2. En déduire, sans calculs, son espérance et sa variance.

5. SUJETS D'ANNALES EN LIEN AVEC CE CHAPITRE.

Remarque 5.0.1. 1. Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole \star .
3. Cette liste n'est pas exhaustive.
4. La quasi totalité des exercices sur les variables à densités sont en fait des exercices d'analyse déguisés (surtout intégration).
5. Dans les exercices les plus longs (type Problème), il est fréquent de voir apparaître à la fois des variables discrètes et des variables à densités.

1. ECRICOME

- 1988 Problème.
- 1989 Problème.
- 1990 Problème \star .

- 1991 Problème *.
- 1992 Problème *.
- 1993 Problème.
- 1995 Exercice 1 (certaines questions utilisent des fonctions dorénavant hors programme).
- 1997 Exercice 3.
- 1998 Exercice 1 et Problème.
- 1999 Exercice 3.
- 2000 Exercice 1 et Problème.
- 2001 Exercice 2.
- 2003 Exercice 3.
- 2004 Exercice 3.
- 2006 Exercice 2.
- 2007 La fin de l'exercice 3.
- 2014 Exercice 3.
- 2015 Exercice 1.
- 2016 Exercice 2.
- 2018 Exercice 3 *.
- 2019 Exercice 3.
- 2020 Exercice 3.

2. EDHEC

- 1997 Problème.
- 2000 Exercice 1.
- 2001 Exercice 3.
- 2002 Exercice 1 (même si la loi "partie entière de la loi exponentielle" est en fait une loi discrète).
- 2003 Exercice 2.
- 2006 Exercice 2.
- 2007 Exercice 2 (ici on s'intéresse à la covariance de deux lois à *densité*. Cette notion n'est (bizarrement) pas au programme et elle est donc définie dans l'exercice.
- 2008 Exercice 3.
- 2009 Exercice 3.
- 2010 Exercice 3.
- 2011 Problème : un couple de lois dont l'une est discrète et l'autre à densité (la loi du couple n'est au programme que pour deux lois discrètes).
- 2012 Problème.
- 2013 Problème *.
- 2014 Problème.
- 2015 Problème.
- 2016 Exercice 3.
- 2017 Exercice 3.
- 2018 Exercice 3.
- 2019 Exercice 3 et Problème.

- 2020 Exercice 2.
- 2021 Exercice 2.
- 2022 Problème.

3. EML

- 2001 Exercice 3.
- 2002 Exercice 3 (la loi à densité arrive vers la fin).
- 2003 Exercice 3.
- 2004 Exercice 3.
- 2006 Exercice 3 (la fin est *).
- 2007 Exercice 3.
- 2008 Exercice 3.
- 2010 Exercice 3 (les lois sont plutôt discrètes).
- 2011 Exercice 3 (les lois continues arrivent à la fin).
- 2012 Exercice 3 *.
- 2015 Exercice 1.
- 2016 Exercice 3 *.
- 2019 Exercice 1.
- 2020 Exercice 3.
- 2023 (sujet 0) Exercice 2.

4. ESCP

- 1987 épreuve III Exercice 3.
- 1989 épreuve III Exercice 1.
- 1991 épreuve III Exercice 2.
- 1993 épreuve III Exercice 3.
- 1998 épreuve III Exercice 3 (les lois sont plutôt discrètes).
- 2000 épreuve III Exercice 3.
- 2002 épreuve II.

5. ESC

- 2006 Exercice 3.
- 2007 Exercice 3 *.
- 2008 Exercice 2.
- 2009 Exercice 4.

6. ESSEC

- 2003 épreuve II.
- 2003 épreuve II Exercice 2 (au milieu d'autres thèmes).
- 2005 épreuve II Partie II (qui dépend de la partie I).
- 2006 épreuve III Exercice 2.
- 2010 épreuve II Partie I et Partie II.
- 2011 épreuve I Problème 2.
- 2012 épreuve I Partie I, partie II et partie III.
- 2012 épreuve II toutes les parties du sujet.

- 2013 épreuve I Partie III.
- 2014 épreuve I toutes les parties de l'épreuve.
- 2015 épreuve I Partie II.
- 2015 épreuve II Exercice 2 et 3.
- 2016 épreuve I Partie I.
- 2017 épreuve I Partie I (surtout mais aussi dans le reste du sujet).
- 2018 épreuve I Partie I.
- 2018 épreuve II un peu dans tout le sujet.
- 2019 épreuve II un peu dans tout le sujet.
- 2021 épreuve II un peu dans tout le sujet.
- 2022 épreuve II.

7. HEC

- Depuis 2010, tous les sujets.